

Лекции по Приложна математика за специалност БИТ, 2009/2010

Доц. д-р Снежана Гочева-Илиева

Лекция 7.

СЛУЧАЙНИ ВЕЛИЧИНИ (СЛ.В.) И РАЗПРЕДЕЛЕНИЯ. ФУНКЦИЯ НА РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ НА СЛ.В.

Определение. Случайната величина (или случайна променлива) X в зависимост от изхода на даден опит взема само една стойност от своето дефиниционно множество D_X , (но точно коя стойност, не е известно отнапред).

Сл.в. X се нарича **дискретна сл.в.**, ако приема по случаен начин стойности от D_X , което се състои от краен или безкраен брой стойности, такива че могат да се номерират (изброимо множество).

Сл.в. X се нарича **непрекъсната сл.в.**, ако приема по случаен начин стойности от D_X , което е краен или безкраен интервал от числовата ос.

Сл.в. се означават с големи латински букви $X, Y, Z \dots$ или гръцките букви $\xi, \eta, \dots$, а техните стойности – с малки латински букви $x, y, z \dots$

Закон за разпределение на сл.в. – това е описание на връзката между всяка възможна стойност на сл.в. и съответната ѝ вероятност. При $x \notin D_X$ вероятността в общия случай се счита за 0.

ДИСКРЕТНИ СЛ.В. И РАЗПРЕДЕЛЕНИЯ

За дискретните сл.в. законът на разпределение е обикновено таблица, формула или графика (полигон, начупена линия).

Ето примерна таблица на разпределение на дискретната сл.в. ξ с дефиниционно множество $D_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и съответните вероятности. Тъй като ξ може да приема всички стойности от D_X , то сумата от вероятностите е 1:

ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$p(\xi=x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1,$$

Тук " $p(\xi=x_i)$ " се чете: "Вероятността случайната величина ξ да приема стойност x_i ".

Пример 4.1. Проверете дали следните таблици задават закони за разпределение на сл.в.:

а)

ξ	2	3	4	5
$p(\xi=x_i)$	0.2	0.3	0.1	0.4

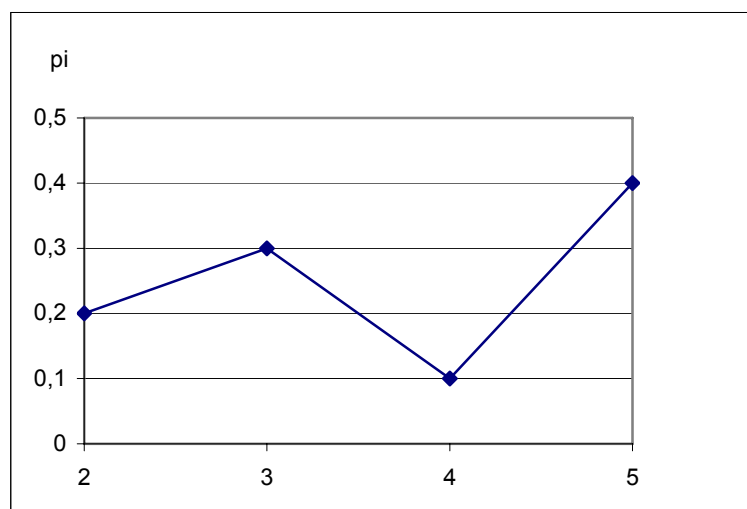
б)

ξ	0	1	2	3
$p(\xi=x_i)$	0.2	0.2	0.4	0.3

Решение: а) Тук $\sum_{i=1}^4 p_i = 0.2+0.3+0.1+0.4=1$, това е закон за разпределение.

б) $\sum_{i=1}^4 p_i = 0.2+0.2+0.4+0.3 \neq 1$, т.е. това не е закон за разпределение.

Пример 4.2. Представете графично закона на разпределение от Пример 4.1.



Пример 4.3. В лотария се разиграват 100 билета. От тях има една награда от 50 лв и 10 награди от 1 лв. Представете таблично закона на разпределение на сл.в., описваща стойността на възможната печалба на участник с един лотариен билет.

Решение: Дефиниционното множество са възможните стойности на печалбата, т.е. $D_X = \{ 50, 1, 0 \}$. Вероятността да се спечелят 50 лв е 1 на 100, т.е. 0.01; вероятността да се спечели 1 лв е 0.1, останалото е за 0 лв. Имаме таблицата:

ξ	0	1	50
$p(\xi=x_i)$	0.89	0.1	0.01

Проверка: Сумата на вероятностите е: $0.89 + 0.1 + 0.01 = 1$.

ФУНКЦИЯ НА РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ (ф.р.) НА СЛ.В.

Определение. Функцията $F(x)$, която показва за всяка стойност на $x \in D_X$ вероятността сл.в. ξ да приеме стойност по-малка от x , се нарича **функция на разпределение на сл.в. ξ** и се бележи с

$$F(x) = p(\xi < x).$$

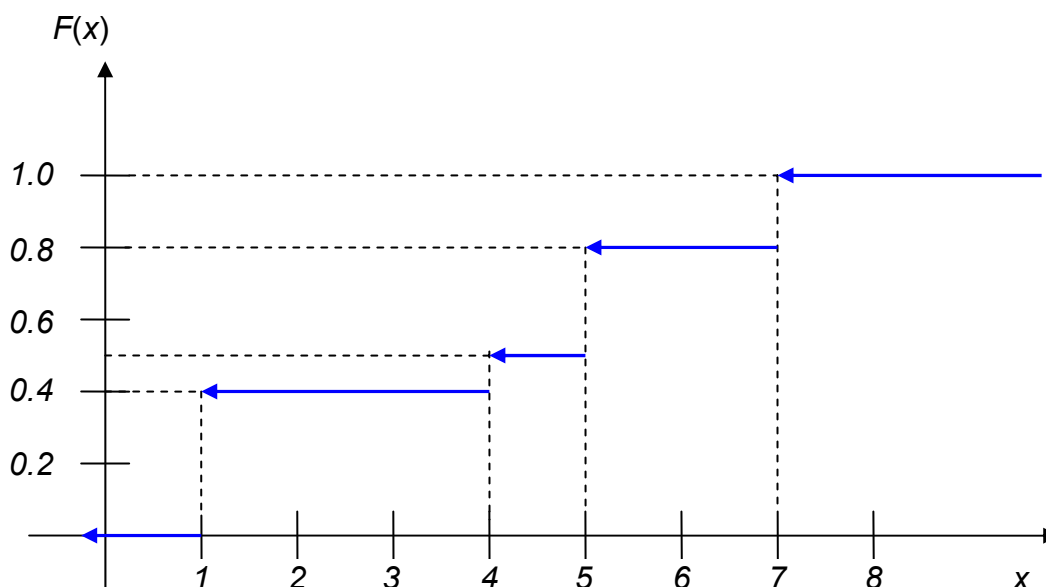
Тя се нарича също **интегрална функция на разпределение** на дискретни и непрекъснати сл.в.

Пример 4.4. Даден е законът на разпределение на сл.в. ξ с долната таблица. Да се намери ф.р. и да се начертае нейната графика.

ξ	1	4	5	7
$p(\xi=x_i)$	0.4	0.1	0.3	0.2

Решение: Имаме $D_X = \{1, 4, 5, 7\}$. За всяка стойност на $x \in D_X$ последователно изчисляваме $F(x)$:

1. При $x \leq 1$, $F(x) = p(\xi < 1) = 0$.
2. При $1 < x \leq 4$, (напр. за $x = 2$) имаме $F(x) = p(\xi < 4) = p(\xi = 1) = 0.4$.
3. При $4 < x \leq 5$, (напр. за $x = 4.33$) имаме $F(x) = p(\xi < 5) = p(\xi = 1) + p(\xi = 4) = 0.4 + 0.1 = 0.5$.
4. При $5 < x \leq 7$, $F(x) = p(\xi < 7) = p(\xi = 1) + p(\xi = 4) + p(\xi = 5) = 0.5 + 0.3 = 0.8$.
5. При $7 < x$, $F(x) = p(\xi = 1) + p(\xi = 4) + p(\xi = 5) + p(\xi = 7) = 0.8 + 0.2 = 1$.



Виждаме, че ф.р. на дискретна сл.в. е дефинирана за цялата реална ос. Ф.Р. е прекъсната в точките от дефиниционното множество, като големините на отскоците са равни на стойностите на съответните вероятности в тези точки.

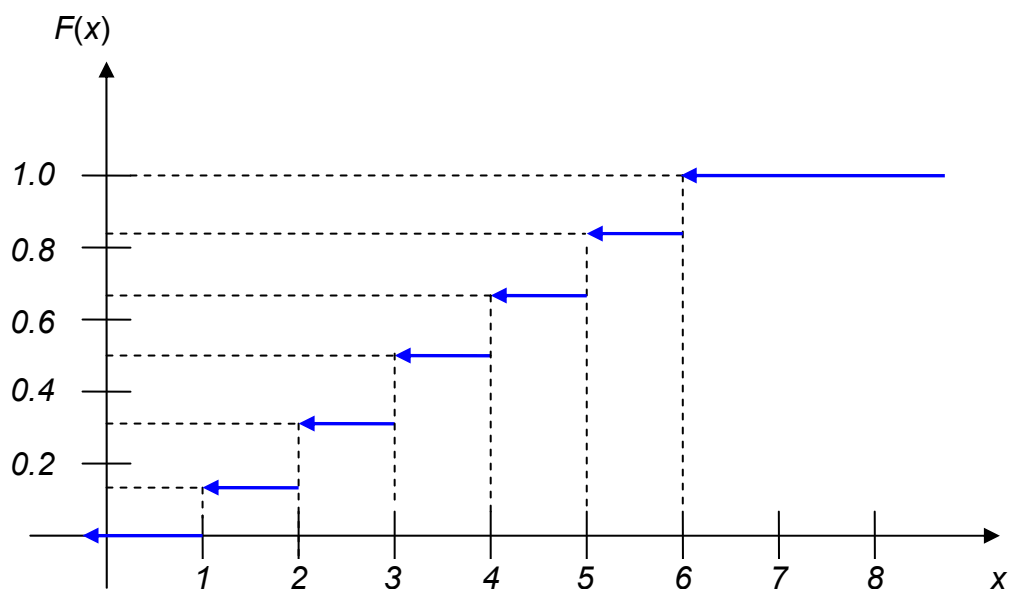
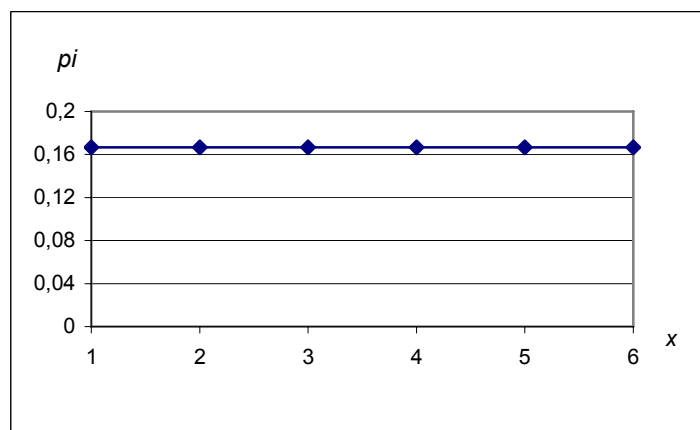
Равномерно разпределение

Това е случаят на равни вероятности.

Пример 4.5. Хвърляме зар. Нека сл.в. ξ е броят паднали се точки. Намерете закона на разпределение. Постройте ф.р.

Решение: Имаме 6 възможности, т.е. $D_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Законът на разпределение е:

ξ	1	2	3	4	5	6
$p(\xi=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



Геометрично разпределение

Провежда се серия от независими опити, при всеки от които събитието A настъпва с една и съща вероятност p . Опитите продължават до първата поява на A .

Пример 4.6. Стрелец стреля, докато улови целта. При всеки изстрел вероятността да улови е 0.6. Да се намери законът на разпределение на случайната величина ξ – брой на изстреляните напразно патрони.

Решение: Щом успехът е с вероятност $p=0.6$, то неуспехът (не улучва) е с вероятност $q=1-0.6=0.4$. Ако $\xi=0$, то няма напразно изстреляни патрони, т.е. стрелецът уцелва от първия път – вероятността $P[\xi=0]=p=0.6$. При $\xi=1$ стрелецът има един напразен изстрел и улучва с втория патрон, т.е. $P[\xi=1]=p \cdot q=0.6 \cdot 0.4=0.24$. Аналогично $P[\xi=2]=p \cdot q^2=0.6 \cdot 0.4^2=0.24 \cdot 0.4=0.096$, и т.н. Получаваме таблица на разпределението:

ξ	0	1	2	3	4	5	...
p_i	p	$p \cdot q$	$p \cdot q^2$	$p \cdot q^3$	$p \cdot q^4$	$p \cdot q^5$	...
p_i	0.6	0.24	0.096	0.0384	0.01536	0.0061	

Биномно разпределение – схема на Бернули

Редица от n независими опита, при които събитието A настъпва с една и съща вероятност $p(A) = p$ (и следователно $p(\bar{A}) = 1 - p = q$) се нарича схема на Бернули и се бележи с (n, p) . С ν се означава броят на настъпване на събитието A (или брой “успехи”).

Вероятността да настъпят точно k “успехи”, т.е. точно k настъпвания на събитието A се бележи с $P_n(k)$. Изпълнени са равенствата:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

$$P_n(k_1 \leq \nu \leq k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k) \quad - \text{вероятността за брой “успехи” от } k_1 \text{ до } k_2,$$

$$p(\nu \geq 1) = 1 - q^n \quad - \text{вероятност за поне един “успех”}.$$

Пример 4.7. Монета се хвърля 4 пъти. Да се намери разпределението на сл.в. ξ – брой паднали се гербове. Да се направи графика на разпределението и на функцията на разпределение.

Решение: Вероятностите се пресмятат по формулата на Бернули.

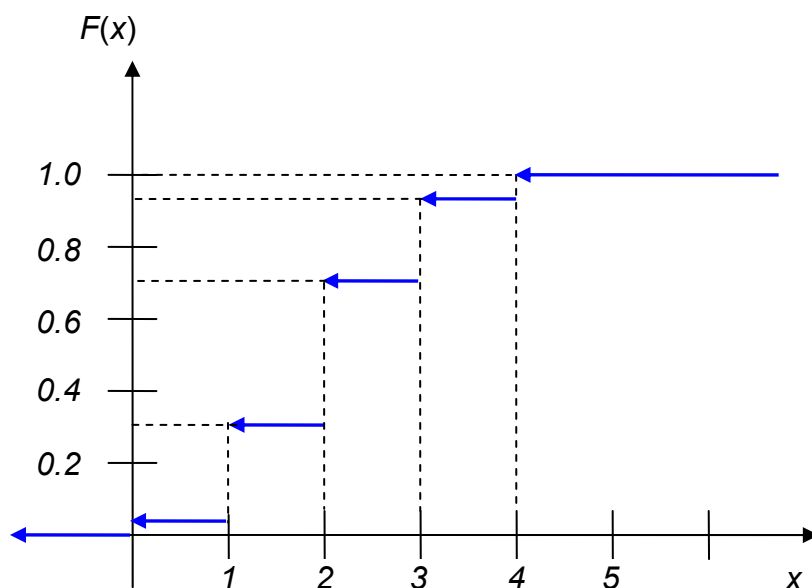
Тук $n=4$, Събитието е A ="Пада се герб", т.е. $p=q=0.5$.

$$P_4(0) = C_4^0 q^4 = (0.5)^4 = 0.0625, \quad P_4(1) = C_4^1 p q^3 = 4(0.5)^4 = 0.25,$$

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = 6(0.5)^4 = 0.375, \quad P_4(3) = C_4^3 p^3 q = 4(0.5)^4 = 0.25,$$

$$P_4(4) = C_4^4 p^4 = (0.5)^4 = 0.0625$$

ξ	0	1	2	3	4
p_i	0.0625	0.25	0.375	0.25	0.0625



Задача. Известно е, че 10% от лекарствата на фармацевтична фирма не покриват европейските стандарти. Проверяват се случайно взети 8 опаковки лекарства на фирмата. Да се намери разпределението на сл.в. ξ – брой стандартни лекарства от избраните.

Упътване. Използвайте формулите за биномно разпределение.

ЧИСЛОВИ ХАРАКТЕРИСТИКИ НА ДИСКРЕТНИ СЛУЧАЙНИ ВЕЛИЧИНИ

Математическо очакване на дискретна сл.в. ξ	$E(\xi) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$
Дисперсия на дискретна сл.в. ξ	$D(\xi) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(\xi))^2 p_i \quad \text{или}$ $D(\xi) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - (E(\xi))^2$
Стандартно отклонение (средно квадратично отклонение)	$\sigma_{\xi} = \sqrt{D(\xi)}$
Мода	$Mo = x_j$, за което се получава максималната вероятност

Някои основни дискретни разпределения и числовите им характеристики

Разпределение	Формула за изчисляване на вероятността $p_k = P\{\xi = k\}$	Математическо очакване $E(\xi)$	Дисперсия $D(\xi)$
Равномерно	$p_k = \frac{1}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2 - 1}{12}$
Геометрично $0 < p < 1, q = 1 - p$	$q^k p, \quad k = 0, 1, \dots$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Биномно $0 < p < 1, q = 1 - p$	$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$	$n \cdot p$	$n \cdot p \cdot q$

Пример 4.8. За пример 4.6 да се изчислят математическото очакване E , дисперсията D и модата Mo .

Решение: От таблицата на разпределението или директно по горните формули:

ξ	0	1	2	3	4	5	...
p_i	p	$p \cdot q$	$p \cdot q^2$	$p \cdot q^3$	$p \cdot q^4$	$p \cdot q^5$	...
p_i	0.6	0.24	0.096	0.0384	0.01536	0.0061	

$Mo=0, E(\xi)=q/p=0.4/0.6=0.667, D(\xi)=q/p^2=0.4/0.6^2=1.11.$

Пример 4.9. За пример 4.7 да се изчислят модата, математическото очакване и дисперсията.

Решение: Вероятностите се пресмятат по формулата на Бернули.

Тук $n=4$, $p=q=0.5$. Тогава $E(\xi)=n.p = 4 \cdot 0,5=2$; $D(\xi)=n.p.q=2 \cdot 0,5=1$; $M_0=2$.

НЕПРЕКЪСНАТИ СЛ. В. И РАЗПРЕДЕЛЕНИЯ

Функция на разпределение (ф.р.) на непрекъснатата сл.в. :

$$F(x) = P\{\xi < x\} = \int_{-\infty}^x f(x) dx, \quad -\infty < x < \infty$$

Функция на плътност:

$$f(x) = F'(x)$$

Вероятността сл.в. ξ да приема стойност в който и да е интервал $(\alpha;\beta)$, $(\alpha;\beta]$, $[\alpha;\beta]$, или $[\alpha;\beta)$ е:

$$P\{\alpha < x < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha)$$

Математическо очакване на непр. сл.в. :

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Дисперсия:

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(\xi))^2 f(x) dx$$

α -квантил на разпределение: Нека $0 < \alpha < 1$, а x_α е число, което е решение на уравнението $F(x_\alpha) = \alpha$. Тогава x_α се нарича α -квантил на разпределението на сл.в. ξ . Ясно е, че $F(x_\alpha) = P\{\xi < x_\alpha\} = \alpha$.

Равномерно разпределение. Има ф.р.:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{при } x > b \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{при } x > b \end{cases}$$

Нормално разпределение (закон на Гаус) ~ N(m,σ):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty, \quad \sigma > 0, \quad m - \text{параметри},$$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt, \quad E(\xi) = m = Mo = Md, \quad D(\xi) = \sigma^2.$$

Стандартно нормално разпределение ~ N(0,1):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad E(\xi) = Mo = Md = 0, \quad D(\xi) = 1.$$

Свойства на стандартното нормално разпределение:

За $x > 0$: $\varphi(-x) = \varphi(x),$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x),$$

$$P\{0 < \xi < x\} = P\{-x < \xi < 0\} = \Phi(x) - \frac{1}{2},$$

$$P\{-x < \xi < x\} = P\{|\xi| < x\} = 2\Phi(x) - 1,$$

$$P\{\alpha < \xi < \beta\} = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

Нормиране: $F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$

Вероятността нормално разпределената сл.в. ξ с разпределение $N(m, \sigma)$ да принадлежи на интервала (α, β) е:

$$P\{\alpha < \xi < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right).$$

Забележка: Стойностите на нормалното стандартно разпределение и квантилите му се намират по таблици.

Пример 1. Непрекъснатата сл.в. ξ има функция на разпределение $F(x)$, зададена с формулата:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}x^2 & \text{при } 0 < x \leq 3 \\ 1 & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

- а) Да се намери вероятността сл.в. ξ да приеме стойност в интервала $[2; 4)$.
б) Да се определи плътността на разпределение.

Решение: а) По дефиниция $P\{2 \leq \xi < 4\} = P\{2 < \xi < 4\} =$

$$= F(4) - F(2) = 1 - \left(\frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{9} \cdot 2^2\right) = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}.$$

б) От връзката между ф.р. и плътността имаме:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{9}x & \text{при } 0 < x \leq 3 \\ 0 & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

Пример 2. Непрекъснатата сл.в. ξ има нормално разпределение с параметри $m=6$ и $\sigma=0,4$. Да се намери:

- а) Вероятността $P\{\xi < 1,6\}$
б) Вероятността $P\{1,3 < \xi < 2,3\}$
в) α -квантилът при $\alpha=0,95$.

Решение: а) $P\{\xi < 1,6\} = F(1,6) = \Phi\left(\frac{1,6 - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{1,6 - 6}{0,4}\right) =$

$$= \Phi\left(\frac{-4,4}{0,4}\right) = \Phi(-1,1) = 1 - \Phi(1,1) = 1 - 0,86433 = 0,13567.$$

Обърнете внимание, че тук преминаването от $F(x)$ към стандартното нормално разпределение $\Phi(x)$ става чрез формулата за нормиране.

в) В този случай е зададена вероятността $\alpha=0,95$ и търсим за кое x_α тя се достига. Т.е. трябва да решим уравнението $F(x_\alpha) = 0,95$. От нормирането имаме:

$$F(x_\alpha) = \Phi\left(\frac{x_\alpha - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x_\alpha - 6}{0,4}\right) = 0,95.$$

От таблицата на стандартното нормално разпределение намираме, че вероятност 0,95 се достига приблизително при аргумент 1,65. Оттук се получава

$$\frac{x_\alpha - 6}{0,4} = 1,65, \text{ откъдето } x_\alpha = 6 + 0,4 \cdot 1,65 = 6,66.$$